

Paracuru-CE

Data: 13/09/2026

Autor: David Dias Marques

E-mail: davidmarquesdias4@gmail.com

Título: 031 - DISTRIBUIÇÃO E ESPAÇAMENTO DE QUADRADOS PERFEITOS NO POLINÔMIO $C_2(L)$

PALAVRAS CHAVES: quadrados perfeitos, polinômios com coeficientes piramidais, quadrados salteados.

Prova rigorosa do número de inteiros de base quadrática entre termos consecutivos da sequência.

OBJETO DE ESTUDO

Polinômio $C_2(L) = (L^2 + L + 1)^2$

TEOREMA

Quantidade de Saltos é igual a $[2L + 1]$

DOMÍNIO

$L \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

1. INTRODUÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO

O polinômio $C_2(L)$ é definido expansivamente como $C_2(L) = L^4 + 2L^3 + 3L^2 + 2L + 1$, o qual corresponde exatamente ao quadrado do trinômio quadrático $B(L) = L^2 + L + 1$. Trata-se de uma função algébrica de elevado interesse na teoria dos números e combinatória, estando ligada a malhas hexagonais centradas e à soma de potências inteiras. Como $C_2(L) = [B(L)]^2$ com $B(L) \in \mathbb{N}$ para todo $L \in \mathbb{N}$, cada termo produzido pela sequência $C_2(L)$ é estritamente um quadrado perfeito. Este relatório tem como objetivo demonstrar analiticamente a lei de distribuição que rege o número de quadrados perfeitos existentes entre dois termos consecutivos dessa sequência.

TEOREMA DOS QUADRADOS PERFEITOS INTERCALADOS

Para todo inteiro não-negativo $L \in \mathbb{N}$, o número de quadrados perfeitos contidos estritamente no intervalo aberto $(C_2(L), C_2(L+1))$ é dado de forma exata pela expressão linear $N(L) = 2L + 1$.

2. DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA RIGOROSA

PASSO 1 (DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO BASE):

Seja $B: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função que associa cada número natural ao seu trinômio correspondente:

$$B(L) = L^2 + L + 1$$

PASSO 2 (CÁLCULO DO TERMO SUBSEQUENTE DA BASE):

Avaliando a função base no ponto $L + 1$:

$$B(L+1) = (L+1)^2 + (L+1) + 1 = (L^2 + 2L + 1) + L + 1 + 1 = L^2 + 3L + 3$$

PASSO 3 (ISOMORFISMO E BIJEÇÃO COM A ORDEM NATURAL):

Como a função quadrado $f(x) = x^2$ é estritamente crescente

para todo $x > 0$, a ordem relativa entre inteiros preserva-se rigorosamente em seus quadrados:

$$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$$

Consequentemente, a quantidade de quadrados perfeitos contidos estritamente entre $C_2(L) = [B(L)]^2$ e $C_2(L+1) =$

$[B(L+1)]^2$ é idêntica à quantidade de números inteiros compreendidos estritamente entre as bases $B(L)$ e $B(L+1)$.

PASSO 4 (CONTAGEM DE INTEIROS NO INTERVALO ABERTO):

Para quaisquer dois inteiros $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a < b$, o número de elementos no intervalo aberto (a, b) é dado por $b - a - 1$.

Aplicando para $a = B(L)$ e $b = B(L+1)$:

$$N(L) = B(L+1) - B(L) - 1$$

3. TABELA DE VERIFICAÇÃO EMPÍRICA

A tabela a seguir exemplifica o teorema para os primeiros valores de L , evidenciando a correspondência exata entre a fórmula $2L + 1$ e a contagem explícita dos quadrados perfeitos pulados.

L	$C_2(L) = [B(L)]^2$	$C_2(L+1) = [B(L+1)]^2$	Quadrados Pulados no Intervalo (Explicitação)	Qtd. Pulada ($2L + 1$)
0	$1^2 = 1$	$3^2 = 9$	2^2 (isto é: 4)	1 ($2 \cdot 0 + 1$)
1	$3^2 = 9$	$7^2 = 49$	$4^2, 5^2, 6^2$ (16, 25, 36)	3 ($2 \cdot 1 + 1$)
2	$7^2 = 49$	$13^2 = 169$	$8^2, 9^2, 10^2, 11^2, 12^2$	5 ($2 \cdot 2 + 1$)
3	$13^2 = 169$	$21^2 = 441$	$14^2, 15^2, 16^2, 17^2, 18^2, 19^2, 20^2$	7 ($2 \cdot 3 + 1$)
4	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$22^2, 23^2, \dots, 30^2$	9 ($2 \cdot 4 + 1$)
5	$31^2 = 961$	$43^2 = 1\,849$	$32^2, 33^2, \dots, 42^2$	11 ($2 \cdot 5 + 1$)

4. PROPRIEDADES COROLÁRIAS

A partir da demonstração principal, derivam-se três propriedades notáveis adicionais:

1. Exclusividade de Bases Ímpares: Como $B(L) = L(L+1) + 1$ e o produto de dois números consecutivos $L(L+1)$ é

sempre par, $B(L)$ é estritamente ímpar para todo L . Assim, $C_2(L)$ gera exclusivamente quadrados de números ímpares.

2. Contagem em Relação aos Quadrados Ímpares: Se restringirmos o universo de análise apenas ao conjunto dos quadrados ímpares, a quantidade de quadrados ímpares pulados entre $C_2(L)$ e $C_2(L+1)$ reduz-se exatamente a L ,

formando a sequência natural 0, 1, 2, 3, 4, ...

3. Crescimento da Distância Absoluta: A diferença direta entre valores consecutivos de $C_2(L)$ expande-se como

$C_2(L+1) - C_2(L) = 4(L+1)(L^2 + 2L + 2)$, o que demonstra que a distância entre os termos é sempre divisível por 4.

5. CONCLUSÃO

Demonstrou-se de maneira rigorosa que a quantidade de quadrados perfeitos existentes entre os termos consecutivos do polinômio $C_2(L)$ obedece estritamente à progressão aritmética dos números ímpares $2L + 1$. Esta propriedade decorre do comportamento quadrático da base $B(L) = L^2 + L + 1$ e da monotonidade da função de potência quadrática nos inteiros positivos.



David Dias Marques,

Entusiasta Matemático e

Colaborador do WebSite Os Fantásticos Números Primos